

# Actividad de Estudio e Investigación para la enseñanza del concepto de Distribución Normal en carreras de ingeniería

*María Valeria Calandra<sup>1</sup>, Viviana Angélica Costa<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> UIDET Gamefi, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP. [mava@mate.unlp.edu.ar](mailto:mava@mate.unlp.edu.ar)

<sup>2</sup> UIDET IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP. [vacosta@ing.unlp.edu.ar](mailto:vacosta@ing.unlp.edu.ar)

**Resumen**— En este trabajo se presenta una investigación realizada sobre las problemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la Distribución Normal. Se propone una estrategia para abordar algunas de las problemáticas observadas en la enseñanza de estos conceptos en carreras de ingeniería. Se elabora en el mismo una propuesta didáctica en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico dirigida para alumnos de un curso regular de probabilidades. La misma propone enseñar en la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo a partir del estudio de un problema abierto en el cual el alumno toma un rol activo en contraposición a la enseñanza tradicional que se utiliza generalmente en el ámbito universitario.

**Palabras clave**— Enseñanza, Probabilidades, Distribución Normal, Didáctica.

## I. INTRODUCCIÓN

Existen investigaciones en el área educativa que advierten de las dificultades en el aprendizaje por parte de los alumnos universitarios del concepto de variable aleatoria y distribución de probabilidad Normal. Huck, Cross y Clark [1] han encontrado dificultades asociadas a la interpretación de la distribución Normal Estándar, indicando que algunos estudiantes creen que todas las puntuaciones tipificadas han de tomar un valor comprendido entre -3 y +3, mientras que otros opinan que no hay límite para los valores máximo y mínimo de estas puntuaciones. Hawkins, Joliffe y Glickman [2] describen en su trabajo los errores que cometen los alumnos universitarios al aproximar la distribución binomial mediante la distribución normal, observan que en general aplican la corrección por continuidad de una forma mecánica, sin entender su significado. Wilensky [3] en su trabajo propone un problema a personas de distintas edades, incluyendo a profesionales con conocimientos de estadística y observan que en general, los sujetos de su investigación sabían resolver problemas relacionados con la distribución normal, pero no eran capaces de justificar su uso en lugar de otro concepto o distribución. Tauber (citado en [4]), centra su estudio en el aprendizaje de alumnos universitarios de la distribución Normal y advierte sobre la existencia de ciertas dificultades de los alumnos para distinguir la distribución teórica y empírica, sobre todo cuando se ven en la necesidad de resolver problemas abiertos. También menciona que en los libros de texto no siempre se relaciona el estudio de la estadística descriptiva con el de la variable aleatoria y con el de las distribuciones de probabilidad. Es decir, no se hace una conexión entre el

estudio del modelo probabilístico y el análisis de datos empíricos. Gutiérrez y otros [5] afirman que en cursos básicos de estadística, el capítulo que corresponde a Estadística Descriptiva, se presenta como un tema aislado, que puede ir antes o después de la parte de Probabilidad. En estas condiciones no se aprovechan algunos desarrollos de la Estadística Descriptiva que podrían ser usados como un puente intuitivo para la comprensión de resultados más abstractos de la teoría de la probabilidad. Hace referencia específica al concepto de histograma como representación de la función empírica de densidad para dar sentido a la definición de variable aleatoria continua. Afirma que la definición de variable aleatoria continua, es muy poco intuitiva e introduce la función de densidad de probabilidad de manera muy artificial. Un trabajo reciente es el de Nardecchia y Hevia [6], quienes realizaron una investigación bibliográfica histórica tendiente a encontrar los posibles obstáculos didácticos en el aprendizaje de la variable aleatoria. Argumentan que, los estudiantes tienen predominantemente desarrollado el pensamiento determinístico sobre el probabilístico y que esto puede influir aún más en la presencia de ese obstáculo principalmente en la enseñanza superior. Concluyen, también, que históricamente no ha sido simple la construcción de un modelo adecuado a partir de los datos observados, de modo que esta vinculación entre la realidad y la variable aleatoria (como modelo matemático) puede constituir otro obstáculo con el que se podría enfrentar un estudiante. Así mismo, ellos enfatizan en la importancia de realizar estudios que nos indiquen la transposición didáctica que el concepto matemático ‘variable aleatoria’ ha sufrido para poder ser incorporado a la enseñanza en las instituciones educativas. Según Ruiz y Albert [7] abordan lo que consideran ellos como una de las ideas fundamentales en los cursos de Probabilidad y Estadística en las instituciones de enseñanza universitaria: el aprendizaje del concepto de variable aleatoria en general. Utilizan como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas y como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica. Su trabajo consiste en saber cuál es el estado de apropiación de algunas ideas fundamentales estocásticas relativas a la variable aleatoria en dos estudiantes que acaban de ingresar al nivel universitario. Según estos autores, la pertinencia del desarrollo de un proyecto de investigación alrededor de la didáctica de la variable aleatoria se sustenta tanto en dificultades en su enseñanza y aprendizaje, como en razones propias del desarrollo del concepto en la probabilidad y la estadística

como ciencias. Opinan además que el concepto de variable aleatoria propicia el paso de la estadística descriptiva y probabilidad básica hacia modelos probabilísticos.

Además, algunos estudiantes confunden la estandarización de una variable aleatoria con la transformación en Normal estándar [8]. En esta publicación se muestra la resolución del problema planteado por parte de un alumno. En la misma se observa que para resolverlo asume que la distribución de la variable aleatoria continua es Normal, simplemente porque se les da como dato la media y el desvío estándar, cuando en realidad la distribución es desconocida y el ejercicio no es posible resolverlo. Esta forma mecánica de resolución se observó en aproximadamente el 80% de las producciones de los alumnos.

Por otro lado, Maltz [9] desarrolla una forma de motivar la aparición de la Distribución Normal en los primeros cursos universitarios de probabilidades y comenta: *“Muchos autores definen la distribución normal sin motivarla y esperan que sus buenas propiedades convengan a los alumnos de su importancia”*. Según Polola y otros [10] la historia de la génesis de los distintos conceptos usados en probabilidades y estadística juega un papel importante ya que la descripción y el análisis de los pasos constructivos que se han dado en su evolución pueden reeditarse en favor del proceso de enseñanza. En este trabajo los autores hacen hincapié en que el estudio de la historia de la matemática influye en el diseño de experiencias didácticas y formulan una actividad para arribar a la distribución Normal partiendo de la distribución Binomial, utilizando la experimentación en el aula para que los alumnos “revivan” el proceso real seguido por Bernoulli y por De Moivre quien en 1773 descubrió la función de densidad de probabilidad de la distribución normal como una forma límite de la función Binomial.

Debido a las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de la Distribución Normal, reportadas en esta introducción, es que se propone en este trabajo un modo alternativo de enseñarlos destinado en particular para cursos en carreras de ingeniería. En lo que sigue se describe el marco teórico en el que se sustenta la investigación y la propuesta didáctica.

## II. MARCO TEÓRICO

En esta investigación se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard [11]-[12]-[13] que ha definido con precisión los fenómenos denominados: monumentalización del saber y pérdida de sentido de las cuestiones que se estudian en la escuela media y en la universidad.

El fundamento de estas definiciones y constructos se encuentran en lo que Chevallard ha denominado Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) [14].

La respuesta de la TAD al problema de la desarticulación, del monumentalismo de los saberes y de la falta de sentido de la enseñanza de la matemática, se materializa mediante un dispositivo didáctico que denomina Actividad de Estudio e Investigación (AEI).

Las AEI, tienen por objeto hacer surgir el estudio de los contenidos matemáticos de una forma funcional (y no formales) desde una perspectiva no-monumentalista en la cual un saber no es un monumento que se visita, sino una

herramienta ordenada al estudio de ciertos tipos de preguntas.

Para ello, las AEI se organizan en torno a una pregunta Q, seleccionada por el profesor, que tenga el potencial de generar el estudio por parte de los alumnos de ciertos contenidos matemáticos. La búsqueda de respuesta a la pregunta, también generará más preguntas derivadas cuyas respuestas llevarán a la reconstrucción de determinadas organizaciones matemáticas (OM). Las respuestas a las preguntas junto con una actividad específica llevarán al estudio de técnicas y de elementos tecnológicos-teóricos específicos para resolver la actividad y serán una excusa para el estudio de las OM que se quieran cubrir del programa de estudio.

La introducción de la noción de las AEI en los sistemas de enseñanza conduce, a plantear la necesidad de (re)definir los programas de estudio en términos de un conjunto de actividades cruciales. La gestión de las AEI dentro del proceso de enseñanza, exige a la comunidad de estudio integrada por los docentes y los alumnos, una transformación de su relación con el saber, pues deja de ser algo que se conoce de antemano para volverse una construcción (o reconstrucción) de común acuerdo en el transcurso de la clase.

En la práctica para cada saber matemático que se ha de enseñar, conviene crear una o varias actividades de estudio e investigación (AEI) que “fuercen” ese saber, de modo que el abordaje del problema generador de la AEI conduzca a la clase a encontrar, los elementos del saber deseado. La actividad propuesta debe ser de interés para el grupo de alumnos a los que va dirigido y además lo suficientemente abierta de modo que actúe como eje articulador del proceso de estudio.

## III. METODOLOGÍA

La propuesta que se presenta a continuación está dirigida, en particular, a alumnos de segundo año de las carreras de ingeniería mecánica y aeronáutica que estén cursando probabilidades. En una primera etapa, a modo de experiencia, se creará un espacio extracurricular en el que los estudiantes se enfrenten a un problema y situación real de la ingeniería en la cual para su resolución deban utilizar herramientas de probabilidades y estadística para estudiar las propiedades y características de la OM distribución Normal de un modo funcional, tal como lo propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Se propondrá por grupos a los alumnos el análisis de un conjunto de datos muestrales relacionados con la manufactura de auto partes, vinculados con el proceso de control de calidad de la producción de anillos de pistones de para motores de automóviles.

Los recursos disponibles serán computadoras personales con acceso a internet, libros de cátedra [15]-[16]-[17]-[18], software estadístico de uso libre (InfoStat), personal docente de la Cátedra Probabilidades e ingenieros de dichas especialidades.

## IV. PROPUESTA

Se propone un problema de interés de la ingeniería, centrado en torno a la pregunta generatriz:

$Q_0$ : *¿Cómo producir partes intercambiables para automóviles?*

La respuesta a esta pregunta origina una AEI que introduce las *razones de ser* de la enseñanza de la *Distribución Normal*. Esta pregunta *Q* actuaría como eje articulador para la reconstrucción de la OM de los temas relativos a la Distribución Normal pero también requerirá el estudio de algunos elementos teóricos, técnicos y tecnológicos relativos al Control de Calidad: Control Estadístico de Procesos y Cartas de Control, de importancia profesional para estudiantes de carreras de ingeniería.

Para realizar la actividad es apropiado saber que cuando se fabrican piezas de automóviles en serie se produce una gran cantidad por una cuestión de economía. Si se trata, por ejemplo, de la manufactura de una gran cantidad de ejes en serie, los bujes respectivos producidos deben cumplir ciertos criterios de calidad de modo de ajustar uno con otro exactamente indistintamente del buje o eje seleccionado. Pero, surgen las preguntas derivadas:

*Q<sub>1.1</sub>: ¿Qué es una producción en serie?*

La producción en serie es un proceso cuya base es la *cadena de montaje* o línea de ensamblado. Es una forma de organización de la producción que delega a cada trabajador o máquina una función específica y especializada.

*Q<sub>1.2</sub>: ¿Qué es una cadena de montaje de una línea de producción?*

El principio de una línea de montaje es que cada trabajador es asignado a una tarea muy específica, que él o ella simplemente repite, y entonces el proceso se mueve al siguiente trabajador que realiza su tarea, hasta que se ha completado la tarea y el producto está terminado. Es una forma de producir bienes en serie, rápida y eficientemente. Dentro de las líneas de montaje no solo hay trabajadores, también hay máquinas. La estandarización y la intercambiabilidad de las piezas es la base de la producción en serie.

*Q<sub>1.3</sub>: ¿Qué es la normalización y estandarización estadística en un proceso de producción?*

Un proceso industrial está sometido a una serie de factores de carácter aleatorio que hacen imposible fabricar dos productos exactamente iguales. Las características del producto fabricado no son uniformes y presentan cierta variabilidad el objetivo ha de ser reducirla lo más posible o al menos mantenerla dentro de unos límites.

El Control Estadístico de Procesos es una herramienta útil ya que su aplicación en el momento de la fabricación, contribuye a la mejora de la calidad de la misma.

Se mostrará ahora a modo de ejemplo algunas de las actividades contempladas en la propuesta.

La característica de calidad considerada para el análisis será el diámetro interior de los anillos de pistones producidos durante un día mediante un proceso de fundición. Los estudiantes deberán construir una carta de control para esta muestra bajo los siguientes supuestos: los anillos poseen un diámetro interior con distribución Normal con valor medio de 74 mm y se sabe que la desviación estándar del diámetro interior debe ser de 0.01 mm en estos casos.

Con la realización de la AEI Se pretende que los estudiantes alcancen los siguientes objetivos: a) Entender el concepto de variabilidad natural de un proceso a corto plazo ya que se trata de la producción de un solo día. b) Aprender a aplicar los gráficos de control por variables en el caso de datos con distribución Normal.

Con la realización de la AEI se pretende introducir la PICM en un actividad extracurricular y que los estudiantes

aborden: el concepto de variabilidad natural de un proceso a corto plazo ya que se trata de la producción de un solo día y la OM relativa a la Distribución Normal de un modo funcional para un estudiante de ingeniería mediante el uso de gráficos de control.

Para cumplir con esos objetivos los estudiantes abordarán los siguientes conceptos correspondientes a la distribución Normal: la misma depende de dos parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , que son la media y la desviación típica respectivamente. Su gráfica en coordenadas cartesianas tiene una forma acampanada y es simétrica respecto a  $\mu$ . El 68,27% de la población está contenido en un entorno  $\pm 1\sigma$  alrededor de  $\mu$ , el 95,45% de la población está contenido en un entorno  $\pm 2\sigma$  alrededor de  $\mu$  y que el 99,73% está comprendido en  $\pm 3\sigma$  alrededor de  $\mu$ . (ver Fig. 1)

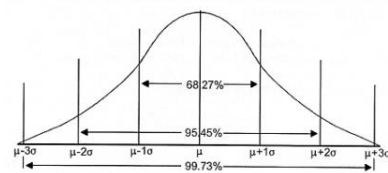


Fig. 1: Gráfica de la Distribución Normal.

Un diagrama de control o carta de control es una gráfica donde los valores de la característica de calidad estudiada se disponen en distintos momentos de tiempo que se identifican sobre el eje de las abscisas. Tres líneas acompañan la serie graficada: la *línea media* (trazada a nivel de la media de los valores de la serie para un estado bajo control) y las líneas correspondientes a los *límites inferior y superior de control* (límites entre los que se espera queden comprendidas casi la totalidad de las observaciones de un proceso bajo control). Puntos fuera de la región determinada por ambos límites sugieren que el proceso no está bajo control. Aún si los valores de la serie observada se encuentran entre estos límites, el proceso puede cuestionarse por no poseer un patrón de distribución aleatoria de los puntos en torno a la línea media. Valores sistemáticamente mayores o menores al esperado sugieren un proceso fuera de control.

A modo de ejemplo, en la Fig. 2 se podrían identificar algunos patrones que podrían indicar señales de alarma en un proceso de producción:

1- ¿Qué tan probable sería que en un proceso bajo control se encontraran tres puntos consecutivos por encima de la línea central? ¿Cómo se podría interpretar?

2- ¿Qué tan probable sería encontrar una medición sobre el límite superior de la línea de control?

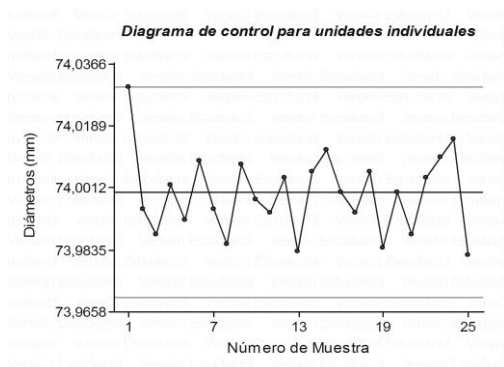


Fig. 2: Diagrama de Control para unidades individuales.



En una segunda etapa se les propondrá a ese mismo grupo de estudiantes evaluar el comportamiento de los diámetros medios  $\bar{X}$  para los anillos de pistones producidos por día. Es decir si  $\bar{X}_1, \bar{X}_2 \dots \bar{X}_{25}$  representan los diámetros interiores medios de los anillos seleccionados durante 25 días se espera que en el desarrollo de la AEI los estudiantes construyan una carta de control para la media y logren los siguientes objetivos:

a) Evaluar la variabilidad natural de un proceso bajo control a largo plazo ya que deberán analizar el comportamiento de la producción media correspondiente a distintos días.

b) Aplicar gráficos de control para la media de un conjunto de datos con distribución Normal.

Para cumplir estos objetivos es necesario que el estudiante utilice el siguiente conocimiento: Si  $X$  es una variable aleatoria  $N(\mu, \sigma^2)$  de la que se extraen muestras de tamaño  $n$ , entonces las medias muestrales  $\bar{X}$  se distribuyen según otra ley normal con media  $\mu$  y varianza  $\frac{\sigma^2}{n}$ .

En la Fig. 3, los límites de control se construyen teniendo en cuenta la variación de  $\bar{X}$ . Al observar el gráfico:

- 1) ¿Existen señales de alarma?
- 2) ¿Se podría evidenciar un cambio en la variación del proceso algún momento o algún cambio en la media?
- 3) ¿Cómo aplicaría las reglas de Western Electric [19] para evaluar el comportamiento de este proceso?

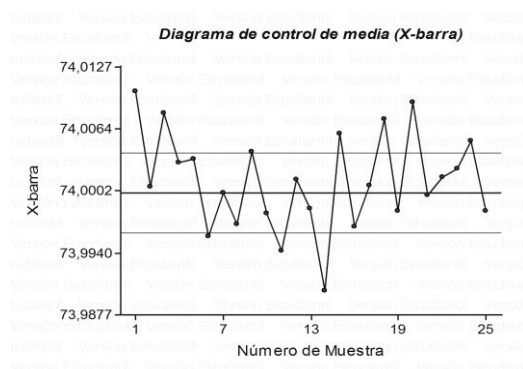


Fig. 3: Diagrama de Control de media.

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo se han expuesto diversas dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de temas vinculados con probabilidades y estadística reportados por varios investigadores. En aporte a esta problemática se expuso una propuesta alternativa a las existentes, la implementación de una AEI en el marco de la TAD que pretende el estudio con sentido la Distribución Normal, a partir de la búsqueda de respuestas a un problema de control de calidad.

A futuro, se prevé implementar y evaluar la AEI, lo que constituirá un trabajo de tesis de maestría. Además esta propuesta abriría las puertas para pensar en otras AEI para el estudio de otros temas de probabilidades y además evaluar las posibles restricciones de la enseñanza actual de la noción de Distribución Normal en el ámbito de la facultad de ingeniería de la UNLP.

En resumen, la AEI permitiría el estudio de un modo funcional las OM relativas a la Distribución Normal, distribución del promedio de variables con distribución Normal y al Control Estadístico de Procesos.

## REFERENCIAS

- [1] S. Huck, T. L. Cross y S. B. Clark, S. B., Overcoming misconceptions about z-scores, *Teaching Statistics*, vol. 8, No. 2, pp. 38-40, 1986.
- [2] A. Hawkins, F. Joliffe y L. Glickman, *Teaching statistical concepts*, Essex: Longman, 1992.
- [3] U. Wilensky, "Learning probability through building computational models", en D. Carraher y L. Meira (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference, Recife, Brazil: PME*, vol. 3, pp. 152-159, 1995.
- [4] B. R. Ruiz, *Un Acercamiento Cognitivo y Epistemológico a la Didáctica del Concepto de Variable Aleatoria*, Tesis de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa, México, 2006.
- [5] R. B. Gutiérrez, y P. Grima Cintas, "El histograma como un instrumento para la comprensión de las funciones de densidad de probabilidad. Probabilidad Condicionada", *Revista de didáctica de la Estadística*, vol. 2, pp. 229-235, 2013.
- [6] G. Nardecchia, y H. Hevia, "Dificultades en la enseñanza del concepto de variable aleatoria", *V Simposio de Educación Matemática*, Chivilcoy, Argentina, 2003.
- [7] B. R. Ruiz y J. A. Albert, "El Caso de la Variable Aleatoria", *Acta Latinoamericana de matemática educativa*, vol. 18, 2005.
- [8] M.V. Calandra y V.A. Costa, V.A. (2015). La problemática de la enseñanza y aprendizaje del concepto de variable aleatoria continua y de función de densidad de probabilidad. *IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el Campo de las Ciencias Exactas y Naturales*.: Departamento de Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación (UNLP).
- [9] A.L. Maltz (2015). Un enfoque en la enseñanza de la distribución Normal. *Revista de Educación Matemática*. 30 (1), 34-37.
- [10] L. Polola, L. Pagano, S. Brunetti, M., Ecalle y E. Borgna, E. (2006). Génesis y evolución histórica de los conceptos de probabilidad y estadística como herramienta metodológica.
- [11] Y. Chevallard, Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire, 2004.
- [12] Y. Chevallard, "Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En Ruiz, L. Higuera, Estepa, A. y García, F. J. (eds), Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico", Universidad de Jaén, pp. 705-746, 2007.
- [13] Y. Chevallard, "Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm", Texte préparatoire à la regular lecture qui sera donnée dans le cadre du congrès ICME-12 (Séoul, 8-15 juillet 2012), 2012.
- [14] M. R. Otero, M.R., Fanaro y V. C. Llanos, "La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física", *Revista Electrónica de Investigación en educación en Ciencias*, vol. 8, No. 1, pp. 77-89, 2013.
- [15] P. L. Meyer, *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*, Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana, 1992.
- [16] J. L. Devore, *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Séptima edición. México: Cengage Learning, 2008.
- [17] S. M. Ross, *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons, 2014.
- [18] D. C. Montgomery y G. C. Runger, *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*, México: Limusa Wiley, 2006.
- [19] D. C. Montgomery, *Control Estadístico de Calidad*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1991.